MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 12
22.1.2020

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Es ist linkerseits

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}$$

sowie rechterseits

$$n\binom{n-1}{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!},$$

also haben tatsächlich beide Seiten den gleichen Wert.

b) Mit a) gilt nun für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n\,x \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= n\,x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k}(1-x)^{(n-1)-k} \qquad \text{(Indexverschiebung)} \\
&= n\,x \cdot (x + (1-x))^{n-1} \qquad \text{(Binomische Formel mit } n-1 \text{ anstelle von } n\text{)} \\
&= n\,x \cdot 1^{n-1} \\
&= n\,x.
\end{aligned}$$

Diese Formel ist in der Stochastik von Bedeutung: Nehmen wir an, ein Elfmeterschütze erzielt mit einer Wahrscheinlichkeit von $x \in [0,1]$ tatsächlich ein Tor. Wieviele Tore sind zu erwarten, wenn er n Versuche hat? Formal gesagt: Was ist der Erwartungswert der Zufallsvariable $X =$ Anzahl der erzielten Treffer in n Versuchen?
In der Schule zeigt man (Stichwort „Binomialverteilung“), daß die Wahrscheinlichkeit für „genau k Treffer“

$$P(X = k) = \binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k}$$

ist. Der Erwartungswert von X ist dann

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k\,(1-x)^{n-k} = nx.$$

In n Versuchen erwartet man also nx Treffer, was auch anschaulich überzeugt.

2. Unter Benutzung des binomischen Lehrsatzes 6.4 gilt

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 1^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{3})^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k \right).
\end{aligned}$$

Für ungerade k heben sich die Terme $(\sqrt{3})^k$ und $(-\sqrt{3})^k$ genau auf, also $(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ ungerade. Und für $k \in \mathbb{N}_0$ gerade, also $k = 2l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, ist

$$(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = (\sqrt{3})^{2l} + (-\sqrt{3})^{2l} = 3^l + 3^l = 2 \cdot 3^l \in \mathbb{N}.$$

Damit ist also

$$(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k \right), \qquad (+)$$

eine Summe über natürliche Zahlen oder 0, wobei der erste Summand gleich 2, also in $\mathbb{N}$ ist. Damit ist $(1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ eine natürliche Zahl. Dies war zu beweisen.

Für z.B. $n = 6$ ergäbe sich dann

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{3})^6 + (1-\sqrt{3})^6 &= \sum_{k=0}^{6} \binom{n}{k} \left((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k \right) \\
&= \binom{6}{0} \cdot 2 + \binom{6}{1} \cdot 0 + \binom{6}{2} \cdot 6 + \binom{6}{3} \cdot 0 + \binom{6}{4} \cdot 18 + \binom{6}{5} \cdot 0 + \binom{6}{6} \cdot 54 \\
&= \binom{6}{0} \cdot 2 + \binom{6}{2} \cdot 6 + \binom{6}{4} \cdot 18 + \binom{6}{6} \cdot 54 \\
&= 1 \cdot 2 + 15 \cdot 6 + 15 \cdot 18 + 1 \cdot 54 = 416 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

3. a) Wir unterscheiden folgende Fälle:
Es werden 2 Löcher gestanzt. Es werden also 2 von den 9 Plätzen ausgewählt ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Das ergibt

$$\binom{9}{2} = 36$$

Möglichkeiten.
Es werden 3 Löcher gestanzt. Dann gibt es

$$\binom{9}{3} = 84$$

Möglichkeiten.
Es werden 4 Löcher gestanzt. Dann gibt es

$$\binom{9}{4} = 126$$

Möglichkeiten.
Also gibt es insgesamt $36 + 84 + 126 = 246$ verschiedene Lochmuster. Diese Karten passen ohne Probleme in einen Rucksack.

b) Zunächst einmal halten wir fest, daß mindestens ein Loch gestanzt werden muss, da sonst die Fahrkarte ja nicht entwertet wird. In Analogie zur Aufgabe a) ergibt sich nun die Anzahl aller Möglichkeiten zu

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \cdots + \binom{9}{9} = \sum_{k=1}^{9} \binom{9}{k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} - \binom{9}{0} \overset{6.4a)i)}{=} 2^9 - 1 = 511$$

Es ergibt sich also, daß auch bei einer Ausnutzung aller möglicher Stanzmuster es immer noch möglich ist, alle Karten zu sammeln.

4. a) i. Bei **unterscheidbaren** Autos hat jeder Autofahrer nacheinenader die freie Wahl zwischen den drei Spuren; insgesamt gibt es dafür $3^{13} = 1.594.323$ Möglichkeiten.

Begründung am Urnenmodell: Die Entscheidung eines Autofahrers für eine Spur ist das Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit drei Kugeln = Spuren mit Zurücklegen (denn eine Spur wird nicht „verbraucht“, wenn ein Autofahrer sich für sie entschieden hat) mit Beachtung der Reihenfolge (denn wir vermerken, *welches* Auto sich gerade für eine Spur entschieden hat). Für das Ziehen von $k = 13$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge gibt es laut Vorlesung $n^k = 3^{13}$ Möglichkeiten.

ii. Bei **nicht unterscheidbaren** Autos wird eine Konfiguration nur dadurch beschrieben, an welcher Spur wieviele Autos stehen (ohne daß es darauf ankäme, *welches* Auto nun genau auf welcher Spur steht); im Urnenmodell von (i) äußert sich diese Änderung darin, daß nunmehr *ohne* Beachtung der Reihenfolge gezogen wird. Für das Ziehen von $k = 13$ Kugeln aus einer Urne mit $n = 3$ Kugeln mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge gibt es aber laut Vorlesung

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+13-1}{13} = \binom{15}{13} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$$

Möglichkeiten.

b) i. Bei **unterscheidbaren** Autos hat der erste ankommende Fahrer die freie Wahl zwischen drei Spuren; der nächste nur noch die Wahl zwischen den beiden Spuren, die noch frei sind, und der dritte ankommende Fahrer fährt dann an die noch freie Spur. Danach steht an jeder Spur genau ein Auto, und für die nächsten Autofahrer wiederholt sich das Spiel (für ihre Entscheidung ist es egal, wieviele vollständige Reihen schon vorne an der Ampel stehen). Insgesamt gibt es also

$$\underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3}_{\text{13 Autos}} = 3^5 \cdot 2^4 \cdot 1^4 = 3.888$$

mögliche Konfigurationen.

ii. Bei **nicht unterscheidbaren** Autos wird der Vorgang genauso ablaufen, wie unter (i) beschrieben – am Ende werden also die ersten 12 Autos sich gleichmäßig auf die drei Spuren verteilt haben (dafür gibt es, bei nicht unterscheidbaren Autos, nur eine einzige Möglichkeit!), und das dreizehnte Auto hat die Wahl zwischen einer der Spuren. Insgesamt gibt es hier also 3 Möglichkeiten, die sich nur durch die Spur unterscheiden, auf dem das dreizehnte Auto steht.